№ 2 | февраль 2022

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 2
февраль
2022

КЛЮВЫ И ПИТАНИЕ

КОГДА ПОРЯДОК НЕ ИМЕЕТ ЗНАЧЕНИЯ

КВАДРАТУРА ЛУНОЧКИ

Enter

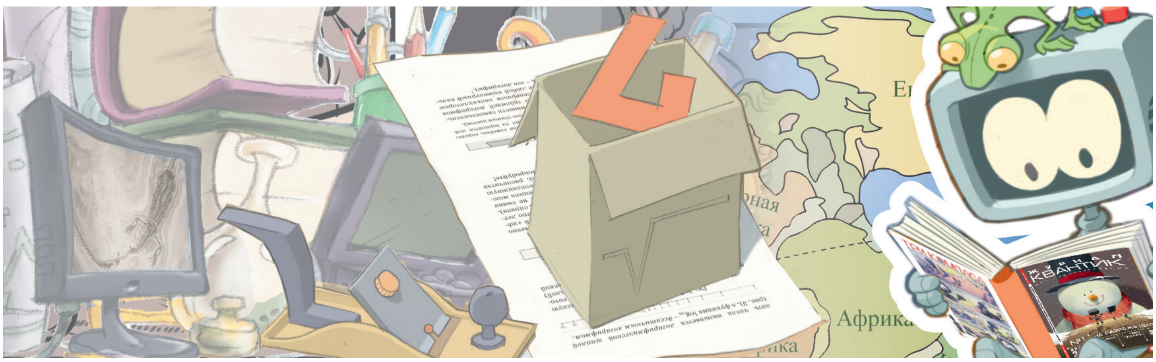
www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

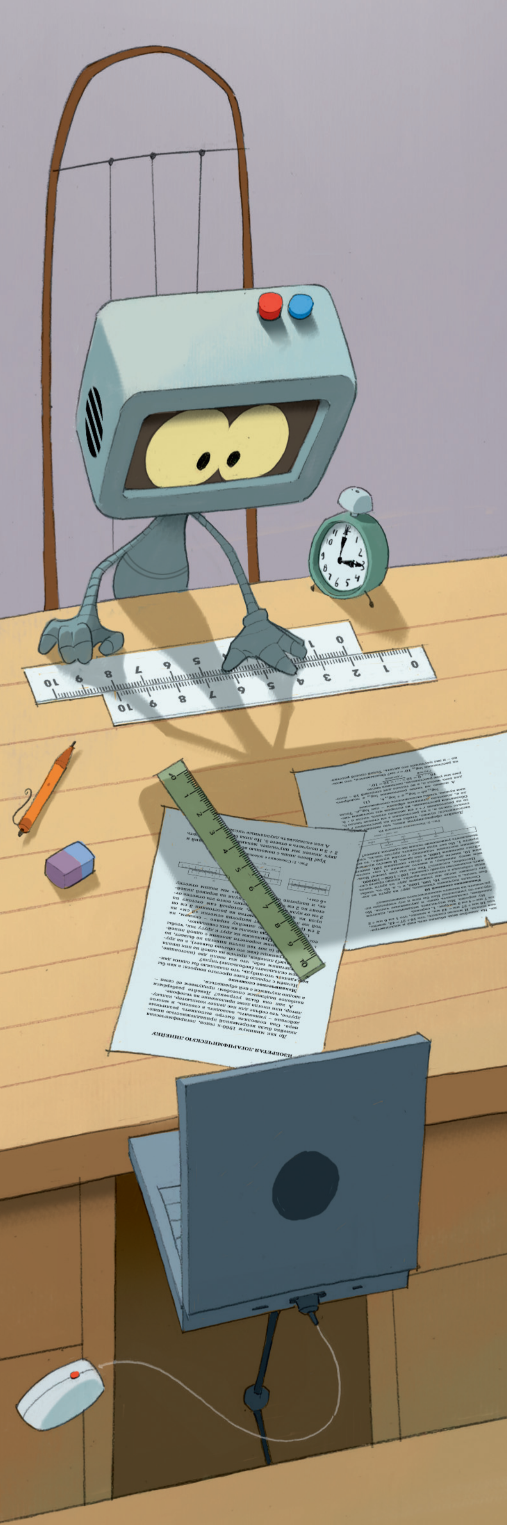
Журнал «Квантик» № 2, февраль 2022 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А.Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, Н.М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России (у оператора) по электронной версии Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
Онлайн-подписка на сайтах:
▪ агентства АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 30.12.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ





ИЗОБРЕТАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКУЮ ЛИНЕЙКУ

До середины XX века логарифмическая линейка была непременной принадлежностью инженера. Она позволяла быстро выполнять различные действия – умножать, возводить в степень и многое другое, что сейчас для нас делает компьютер, калькулятор или приложение на телефоне.

А как она была устроена? Чтобы разобраться, воспользуемся наиболее надёжным способом – придумаем её сами, – а заодно научимся с ней обращаться.

Механическое сложение

Начнём с гораздо более простого вопроса: а как нам сделать что-нибудь, что позволяло бы одним движением складывать (небольшие) числа?

Представим себе, что мы взяли две (настоящие, деревянные) линейки, причём на одной из них шкала у верхней границы (как это обычно бывает), а на другой у нижней (а вот так почти никогда не бывает, но можно же и самим перенести деления с одной линейки на другую!). Приложим их друг к другу так, чтобы совпали нули – тогда шкалы на них совпадают.

Сдвинем нижнюю линейку вправо – скажем, на 2 см (рис. 1, в центре) Что будет напротив отметки «3 см» на той же линейке? Это отметка на расстоянии 3 см от нуля на нижней линейке, который сам отстоит на 2 см от нуля на верхней. Значит, всего эта отметка отстоит на 2 см + 3 см = 5 см от нуля на верхней линейке, и напротив отметки в «3 см» мы видим отметку «5 см».

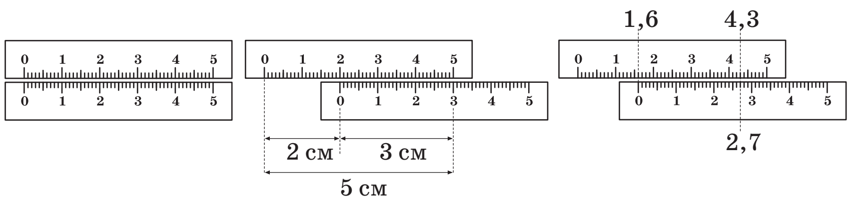


Рис. 1. Сложение с помощью двух линеек

Ура! Всего лишь с помощью абзаца рассуждений и двух линеек мы научились механически складывать 2 + 3 и получать в ответе 5. Но лиха беда начало!

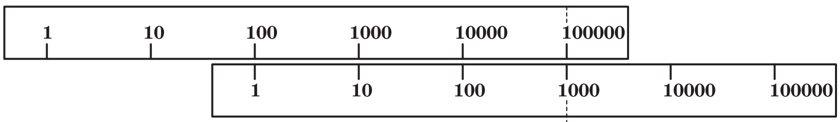
А как складывать двузначные числа? Да точно так же! На линейке ведь есть ещё и миллиметровая шкала. И можно сказать, что $16 + 27 = 43$, можно, что 16 мм + 27 мм = 43 мм, а можно, что 1 см 6 мм + + 2 см 7 мм = 4 см 3 мм (рис. 1, справа).

Ну хорошо. Мы научились механически, сдвигом линейки, складывать одно- и двузначные числа. Но трудно-то умножать! Как бы нам и эту операцию переложить на нашего механического помощника?

Умножение степеней 10

Сначала научимся умножать друг на друга не любые числа, а только 10, 100, 1000 и т. д. Не то чтобы это сложно: когда мы умножаем друг на друга числа вида *«единица и сколько-то нулей»*, нужно просто сложить количество нулей: скажем, $100 \times 1\,000 = 100\,000$.

Постойте, сложить? Так это мы уже умеем! Возьмём нашу линейку и вместо деления «1 см» поставим 10, вместо деления «2 см» поставим 100, вместо «3 см» поставим 1000 и т. д. И вместо нулевого деления поставим «единицу с нулём нулей», то есть просто 1. Но вот куда поставить другие числа, чтобы выполнять умножение таким же сдвигом линеек?



$100 \cdot 1000 = 100000$

Рис. 2. Умножение степеней 10

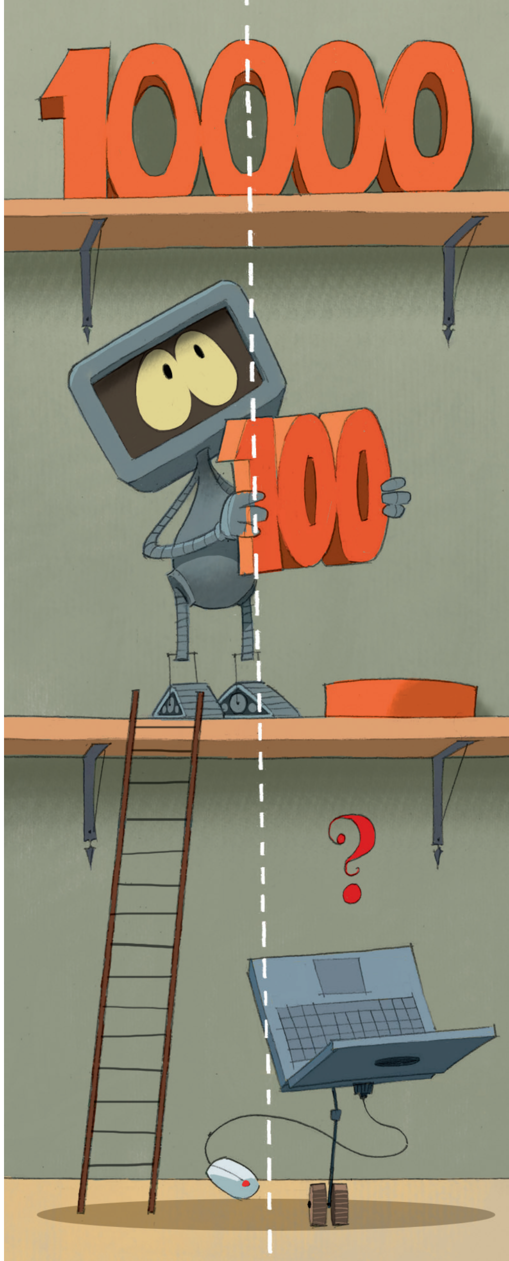
Давайте сформулируем явно, что именно должно выполняться: если на расстоянии r см стоит число a, а на расстоянии s см стоит число b, то на расстоянии $r + s$ см должно стоять число $a \cdot b$. Обозначим расстояние, на котором мы поставим число a, довольно длинным образом – как $\log_{10} a$. Тогда нам нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b. \qquad (1)$$

А можно ли такие расстояния $\log_{10} a$ подобрать для всех чисел a, а не только для степеней 10 – которые мы уже расставили, поставив число

$$1\underbrace{0\ldots0}_{r\text{ нулей}} = \underbrace{10 \times \cdots \times 10}_{r\text{ десяток}} = 10^r$$

на расстоянии $\log_{10} 10^r = r$ см? Оказывается, что можно, и мы научимся это делать. Такой способ расстав-



лять числа называется *логарифмической шкалой* (рис. 3), а функция $\log_{10}$ – *десятичным логарифмом*.

Рис. 3. Логарифмическая шкала

Но прежде чем выяснять, как именно такую функцию $\log_{10}$ строить, давайте воспользуемся готовым результатом (таблицей или файлом со шкалой) и сделаем «демоверсию» логарифмической линейки своими руками!

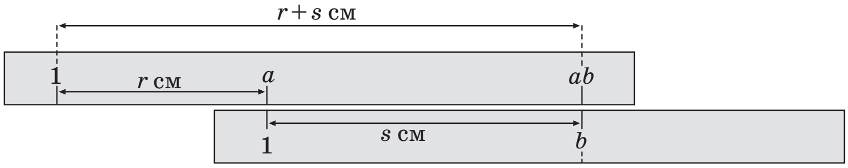


Рис. 4. Логарифмическая линейка: принцип работы

Настоящая логарифмическая линейка

В настоящей логарифмической линейке обычно её подвижная часть вставляется в жёлоб в неподвижной части, чтобы легко вдоль неё скользить, не выпадая (рис. 5, справа). Самому сделать такое из дерева не очень просто, но для демонстрации принципа можно сделать её и из бумаги, обернув неподвижную часть вокруг подвижной (рис. 5, слева), распечатав заготовку по ссылке kvan.tk/rule (попробуйте!).

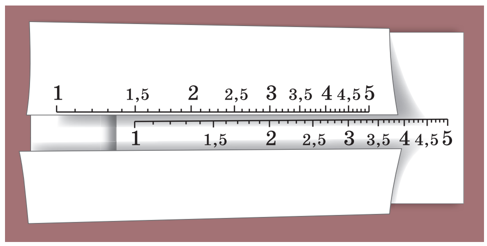


Рис. 5. Слева: самодельная логарифмическая линейка; справа: логарифмическая линейка в разрезе (один из вариантов конструкции; подвижная часть выделена тёмным цветом)

А ещё можно такую шкалу нанести самостоятельно – воспользовавшись таблицей логарифмов, компьютером или инженерным калькулятором (одна из функций, которые любой инженерный калькулятор умеет вычислять, – это логарифм).[1]

[1] Ещё симулятор логарифмической линейки есть на сайте «Математических этюдов»: см. etudes.ru/etudes/slide-rule. Но сделать своими руками всё-таки интереснее!

Как можно увидеть на фотографии (рис. 6), настоящая логарифмическая линейка сложнее, чем наше простое описание: на ней значительно больше шкал, и благодаря этому она позволяет легко выполнять значительно больше операций.

На этой фотографии видны шкалы A (на неподвижной части) и B (на подвижной) – это те самые логарифмические шкалы. Сдвиг подвижной части и позволяет легко умножать (и делить!) числа. Но что, если нам часто приходится возводить числа в квадрат? Можно каждый раз умножать число само на себя, $a^2 = a \cdot a$, сдвигая 1 на подвижной части к a и читая ответ напротив отметки a на подвижной части. А можно заметить, что

$$\log_{10} a^2 = \log_{10} a + \log_{10} a = 2 \log_{10} a. \qquad (2)$$

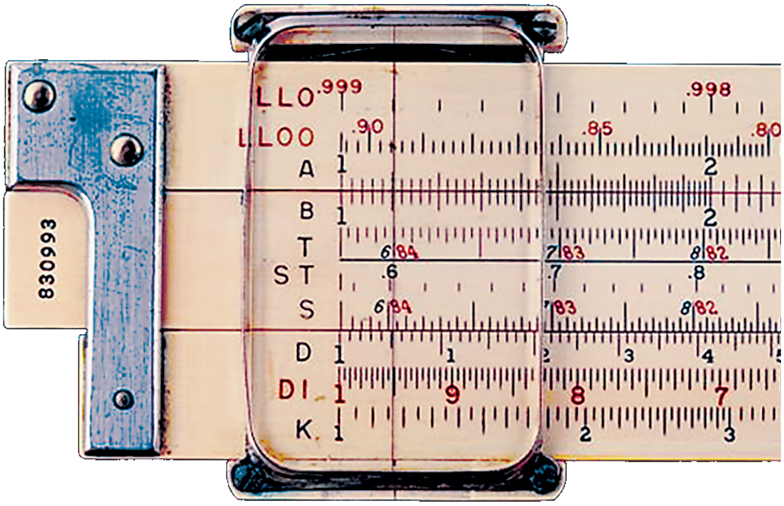
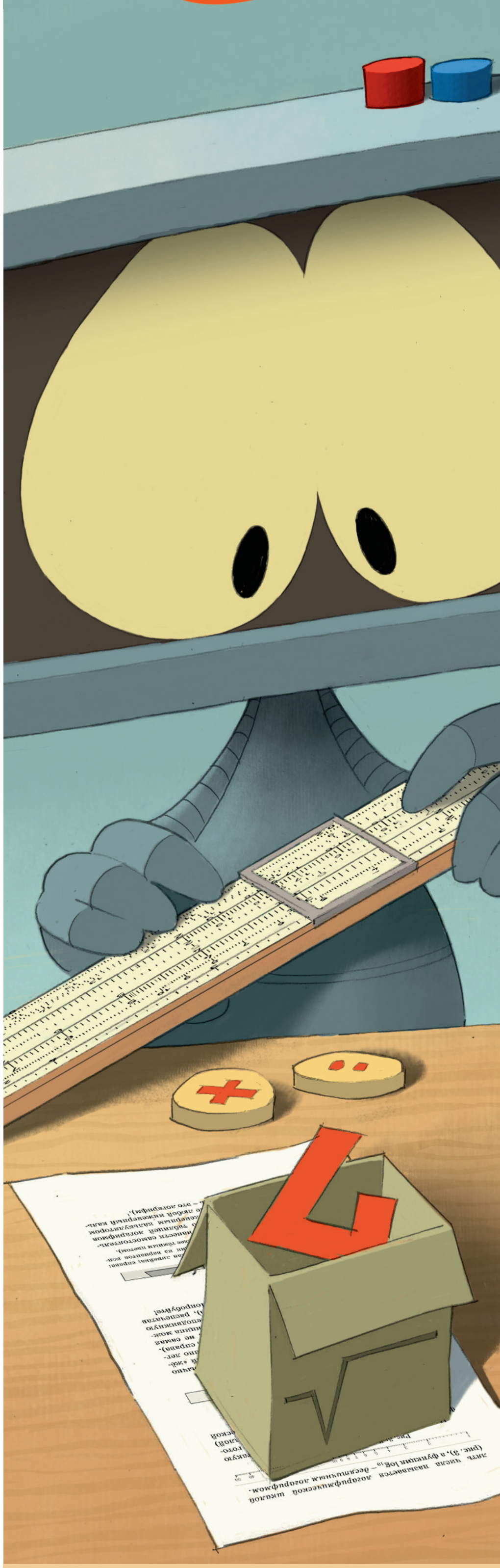
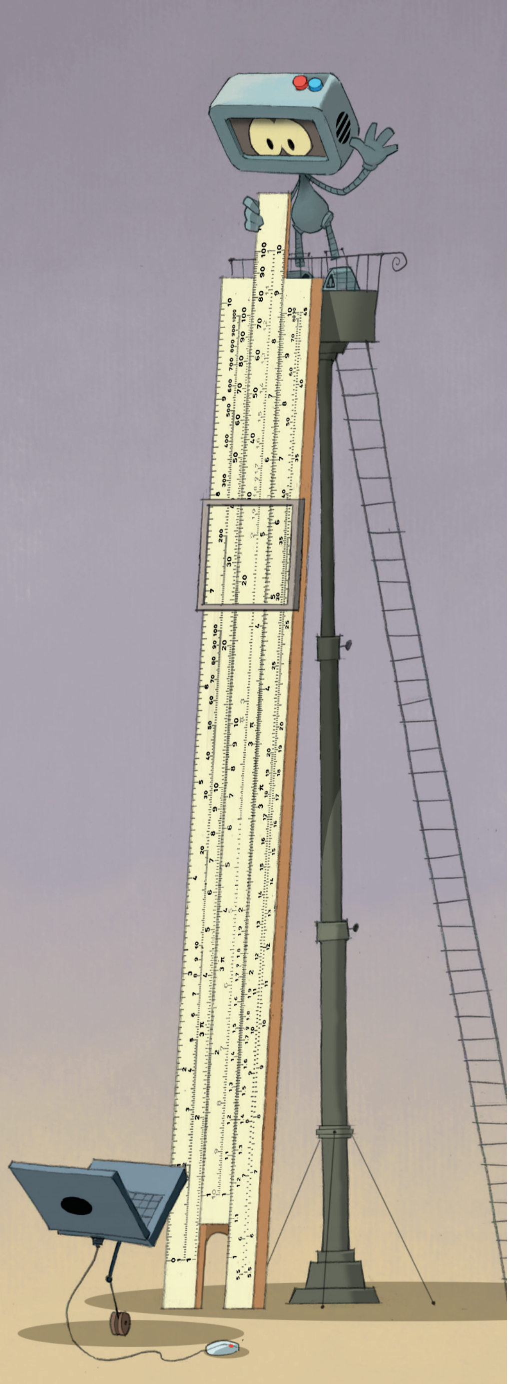


Рис. 6. Логарифмическая линейка: шкалы и нить. Мелкие цифры 1, 2, 3 ... на шкале D отмечают десятые доли, то есть это деления 1,1; 1,2; 1,3...

На фотографии видна шкала D – это логарифмическая шкала A, растянутая в два раза. И это позволяет возводить числа в квадрат одним движением прозрачного ползунка с нитью (применяемого для точного сопоставления чисел на разных шкалах): напротив числа a на шкале D мы видим на шкале A число a^2. А чтобы извлечь из числа b квадратный корень, нужно найти число b на шкале A; напротив него на шкале D и будет искомый корень $\sqrt{b}$ (например, напротив 2, записанного на шкале A, стоит на шкале D число, чуть большее 1,4).





А что, если мы хотим возвести число в третью или в пятую степень? Аналогично (2),

$$\log_{10} a^3 = \log_{10}(a \cdot a^2) = \log_{10} a + \log_{10} a^2 = \\ = \log_{10} a + 2\log_{10} a = 3\log_{10} a,$$

и вообще

$$\log_{10} a^n = n \log_{10} a. \qquad (3)$$

Поэтому n-ю степень числа a можно вычислить так: сначала вычислить логарифм a, потом умножить его на n – и результатом будет логарифм a^n. И тут нам нужно умножать на n.

Стоп, умножать? Так мы это уже научились делать быстро – как раз с помощью логарифмов! Давайте применим (ещё раз!) логарифм к равенству (3): получаем

$$\log_{10}(\log_{10} a^n) = \log_{10}(n \log_{10} a) = \log_{10} n + \log_{10}(\log_{10} a).$$

Поэтому – если поставить каждое число a на расстоянии $\log_{10}(\log_{10} a)$ на ещё одной шкале, то мы сможем вычислять a^n, просто сдвигая относительно этой шкалы обычную логарифмическую (рис. 7).

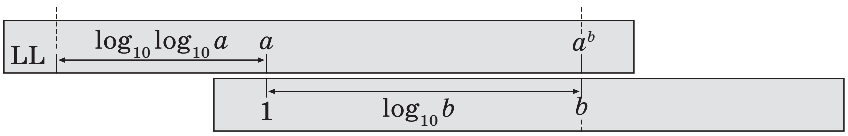


Рис. 7. Возведение в степень

Так вот – на некоторых шкалах (их часто подписывают символами LL, см. рис. 6) число a стоит на расстоянии в $\log_{10}(\log_{10} a)$ единиц длины.[2] И теперь мы знаем зачем – чтобы легко возводить числа в степени!

Упражнение. На рисунке 8 отмечены 1, 8 и 25 на логарифмической шкале. С помощью обычной линейки отметьте на этой же шкале числа 200, 64, 5, 2, 10, $\sqrt{2}$, 0,5. Где располагается число 15, ближе к 8 или к 25?

Рис. 8

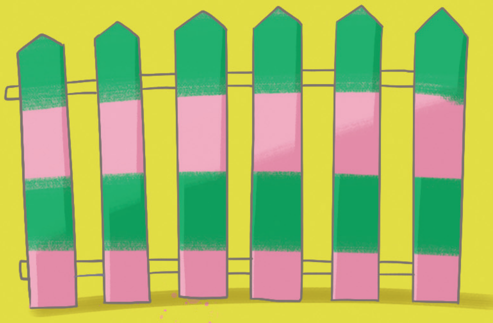
Окончание следует

Художник Алексей Вайнер

[2] Везде выше мы писали о *десятичном* логарифме, просто потому, что мы естественно придумали именно его. Но логарифмы бывают не только десятичные – и об этом мы поговорим в следующий раз.

Когда порядок не имеет значения

Александр Пиперски



В «Квантике» № 1 за 2022 год в одной из задач Турнира имени М. В. Ломоносова была дана таблица из 18 словосочетаний с названиями цветов, с указанием, сколько раз они встречаются в корпусе текстов на американском английском языке с 1990 по 2009 год:

black and blue	257	blue and black	68
black and red	125	red and black	251
black and white	4541	white and black	525
blue and green	206	green and blue	194
blue and pink	43	pink and blue	95
blue and red	174	red and blue	437
green and pink	28	pink and green	65
green and white	184	white and green	92
pink and red	62	red and pink	40

Словарь: and – ‘и’; black – ‘чёрный’; blue – ‘синий, голубой’; green – ‘зелёный’; pink – ‘розовый’; red – ‘красный’; white – ‘белый’.

Требовалось узнать, какое словосочетание встречается в тех же текстах чаще другого: *black and pink* или *pink and black*; *blue and white* или *white and blue*; *green and red* или *red and green*; *pink and white* или *white and pink*; *red and white* или *white and red*.

Давайте разбираться. В каком порядке перечислять элементы, порядок которых не важен? Можно подумать, что в случайном, но в реальности это не так. Например, на сайте problems.ru в условиях нескольких сотен геометрических задач встречается выражение «в треугольнике *ABC*», но нет ни одной задачи, где сказано «в треугольнике *ACB*», «в треугольнике *BAC*» и т. д. Здесь действует алфавитный принцип, а что ещё бывает в таких ситуациях в языке?

Пары цветов – отличный пример того же рода: какая разница, называть ли футболистов «Спартака» красно-белыми или бело-красными, футболистов ЦСКА – красно-синими или сине-красными, а футболистов «Динамо» – бело-голубыми или голубо-белыми? Но мы почему-то говорим *красно-белые* и *красно-синие*, а *голубо-белый* как-то даже и не скажешь.

Такие предпочтения удобно изучать с помощью *лингвистических корпусов* – больших собраний текстов, по которым можно посчитать, что встречает-

ся чаще, а что реже. Строгих правил мы не выведем (и так, и так можно!), но найдём какие-то закономерности. Одна из них и представлена в задаче: не то чтобы по-английски нельзя было сказать *green and pink* ‘зелёно-розовый’, но *pink and green* употребительнее. В итоге прилагательные выстраиваются в шкалу: *pink* > *red* > *black* > *blue* > *green* > *white*. Если цвет *X* на этой шкале левее, чем цвет *Y*, то сочетание *X and Y* частотнее, чем *Y and X*. **Ответы:** *pink and black*, *blue and white*, *red and green*, *pink and white*, *red and white*.

Задача решена, но остаётся вопрос: откуда берётся эта закономерность? Это следствие того, что лингвисты называют *четвёртым законом Бехагеля* в честь немецкого лингвиста Отто Бехагеля (1854–1936) или *законом Панини* в честь древнеиндийского лингвиста Панини (около VI–IV вв. до н. э.): при прочих равных более короткие члены предложения ставятся раньше более длинных. К примеру, по-русски мы скажем *Я подарил ей бусы*, но *Я подарил их Марине*: в первом случае сперва «кому?», а затем «что?», а во втором сперва «что?», а затем «кому?». Дополнения в дательном и винительном падеже можно расположить в любом порядке, но естественнее звучит, когда сперва стоит короткое местоимение, а за ним уже длинное существительное. А теперь попробуйте произнести английские слова из условия задачи и послушайте, какие в них звучат гласные. В *pink*, *red* и *black* они краткие, в *blue* и *green* – долгие, а в *white* ещё длиннее, там и вовсе дифтонг (сочетание двух гласных звуков – [а] и краткого [и]): это как раз и соответствует нашей шкале.

А в итальянском языке в слове *bianco* ‘белый’ в корне произносится краткий гласный [а], а в слове *nero* ‘чёрный’ – долгий гласный [э], и поэтому ‘чёрно-белый’ по-итальянски будет *bianconero*, а не *nerobianco*. В русском языке ударные гласные не различаются по долготе, но мы смотрим на количество слогов: односложные корни идут раньше двусложных. Мы скорее скажем *красно-зелёный*, а не *зелёно-красный; бело-голубой*, а не *голубо-белый* (слово *голубой* не ставят в начале ещё и потому, что у него ударение на окончании, и в *голубо-белый* пришлось бы сдвигать его на *у*, чтобы оно не попало на соединительный гласный).

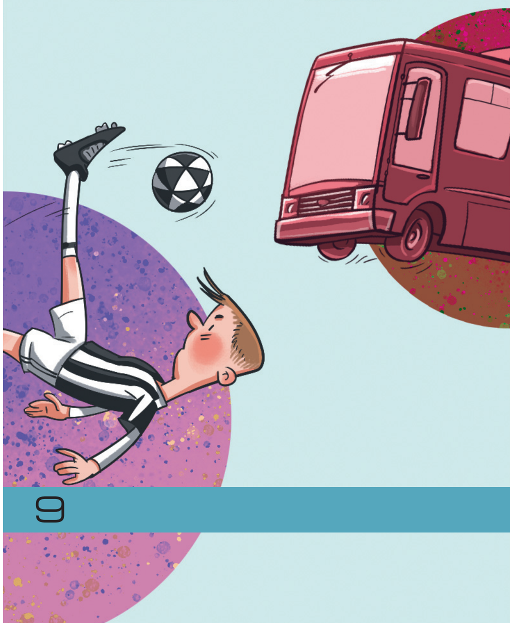
Если вы внимательно решали задачу, то наверняка заметили, что в условии дано 9 комбинаций цветов, а в задании – 5, то есть пропущена одна комбинация из 15 возможных. Дело в том, что для слов *black* ‘чёрный’ и *green* ‘зелёный’ закономерность нарушается: *black and green* – 65 раз, *green and black* – 74 раза. Можно, конечно, сказать, что этот контрпример разрушает всё, и не пытаться предсказывать более распространённый порядок цветов с помощью шкалы, но всё же простая модель, описывающая абсолютное большинство случаев, – это хорошо, а с небольшим шумом можно и смириться: примерно как когда мы говорим, что Земля имеет форму шара, мы понимаем, что это не совсем правда, но предпочитаем не переусложнять.

В любом случае, статистика по текстам не может быть идеальной по разным причинам:

- Никакой корпус текстов не представляет язык полностью. Подсчёты в задаче выполнены на материале 400 млн слов из текстов 1990–2009 годов, но вполне возможно, что если расширить массив данных, добавив другие годы или даже другие тексты за те же годы, результаты изменятся. Это особенно вероятно в тех парах, где различия невелики: например, *blue and green* ‘синий и зелёный’ 206 ~ *green and blue* 194.
- Отдельные закрепившиеся сочетания могут сильно влиять на результаты. Так, *bianconeri* по-итальянски – это почти всегда футболисты команды «Ювентус», четверть вхождений *green and black* по-английски – это *green and black teas* ‘зелёные и чёрные сорта чая’ и т. д.
- Некоторые примеры на самом деле являются частью более длинного списка: к примеру, *white and blue* обычно встречается в ряду *red, white and blue*.
- Английские сочетания типа *red and white buses* могут обозначать либо двуцветные предметы («красно-белые автобусы»), либо одноцветные предметы двух видов («красные и белые автобусы») – не исключено, что порядок слов в этих значениях устроен по-разному. В русском языке *розово-красный* – это либо двуцветный, либо красный с розовым оттенком, и это тоже может портить простой подсчёт.

Вот сколько разных сложностей порой скрывается за небольшой лингвистической задачей!

Художник Мария Усеинова

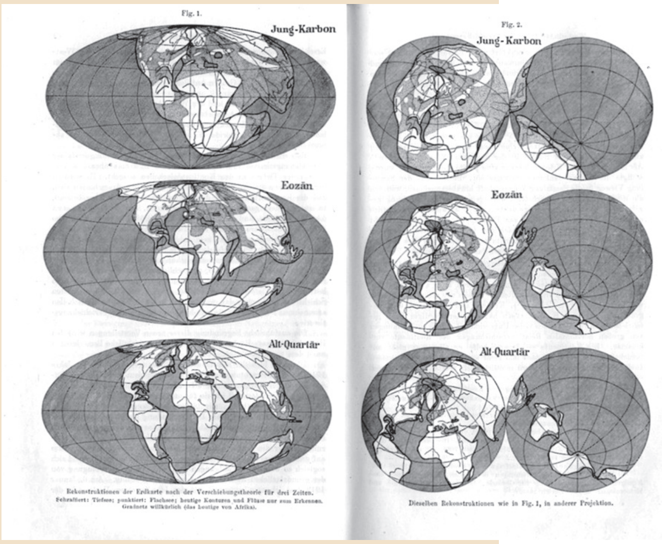


ВЕЛИКИЕ УМЫ

АЛЬФРЕД ЛОТАР ВЕГЕНЕР

Марина Молчанова

Окончание. Начало в № 1, 2022



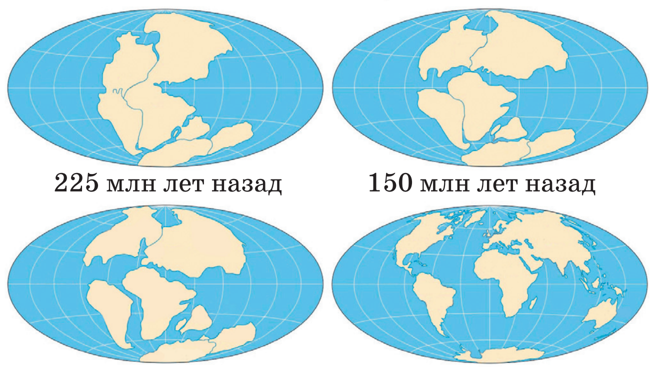
Движение континентов (иллюстрации из книги «Происхождение континентов и океанов»)

Поговорим о том, какое место занимала теория дрейфа континентов в науке времён Вегенера.

На рубеже XIX–XX веков подавляющее большинство геологов считало, что никакого дрейфа нет, а контуры континентов и океанов определились ещё в древности. Но поскольку геологические события всё же происходят, их обычно объясняли в рамках *контракционной гипотезы* (contraction – сжатие). Мол, когда-то Земля образовалась в виде расплавленного шара, затем она остывала и затвердевала с поверхности, по мере дальнейшего остывания уменьшаясь в объёме. И как на сдувающемся воздушном шарике или на остывающем печёном яблоке появляются складки и морщины, так они появились и на лице Земли – это горные системы.

Чуть позже была развита сложная теория *геосинклиналей* – тех самых складок, глубоких прогибов земной коры, в которых происходят процессы, важные для образования рельефа. Представлению о том, что материки куда-то «ползут» друг относительно друга, в этой теории также не было места.

Изредка бывали и другие мнения. Так, американец Фрэнк Тейлор первым высказал идею, что горы могут формироваться благодаря столкновениям движущихся континентов, как торосы во льдах. Но эти идеи не получили распространения.



225 млн лет назад; 150 млн лет назад; 100 млн лет назад; В настоящее время

Альфред Вегенер был первым, кто собрал множество разнообразных материалов в поддержку гипотезы дрейфа континентов и систематически занимался её продвижением. Вот некоторые из его аргументов.

- На разных континентах можно найти одни и те же ископаемые – растительные и животные. Да, можно предположить, что когда-то между этими континентами были сухопутные мосты – типа нынешнего Панамского перешейка между двумя Америками. Но, как показал Вегенер, существование многих таких мостов невозможно из геофизических соображений. А вот если континенты были когда-то собраны воедино, как на схеме справа, мы получаем непрерывные области распространения этих растений и животных в древние времена – и всё объясняется.

- Если свести вместе запад Африки и восток Южной Америки, то многие геологические характеристики этих побережий отлично подойдут друг к другу, как если бы они действительно раньше были совмещены и потом разделились. По выражению Вегенера – это как куски разорванной газеты, которые можно приложить друг к другу и, наконец, прочесть строчки целиком. Сходятся горные хребты, геологические разрезы, типы минералов.
- Климат прошлых эпох в разных областях Земли сильно отличался от нынешнего. Ископаемые Северной Европы и Антарктиды говорят о том, что когда-то там были тропики. А вот в Африке, Индии, Южной Америке и Австралии есть древние ледниковые отложения – но не простирался же ледник до самого экватора! Разумно предположить, что раньше материки находились не там, где сейчас. Более того, направления движения древнего ледника в этих местах (их можно узнать и сейчас по бороздам на камнях) отлично согласуются друг с другом, если свести южные континенты воедино.

По Вегенеру, 300 миллионов лет назад все нынешние материки были слеплены вместе в один сверхконтинент – *Пангею*. Греческая приставка «пан» означает «весь», а Гея – это Земля.

Но что может двигать материками? Мы уже говорили: именно это стало главным камнем преткновения. Правдоподобного механизма не было. Вегенер предполагал, что движущие силы могут быть связаны

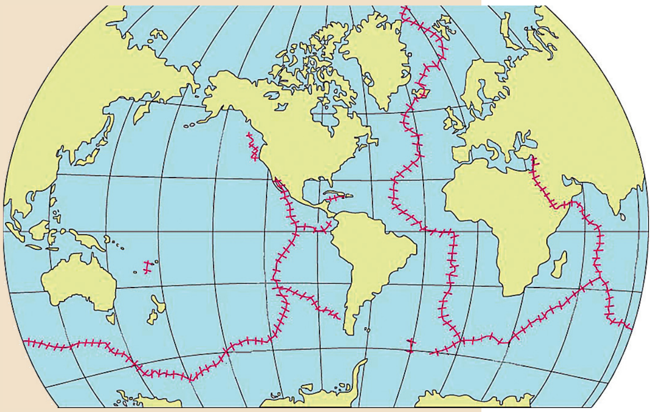
Ископаемые в Гондване


Глоссоптерис. Музей естественной истории, Хьюстон, Техас

Так мы сейчас представляем себе Пангею

Вегенер в молодости

Следы движения древних ледников



Срединно-океанические хребты показаны красным

с вращением Земли или с приливными явлениями. Но легко показать: этих сил недостаточно для того, чтобы континенты «ползли», пропахивая собой океаническое дно. А достаточная сила просто разрушит континенты.

Теория Вегенера, противоречившая принятым идеям, не просто была отвергнута: её высмеивали, считали лженаукой в двадцатые, тридцатые, сороковые годы XX века. И лишь немногие специалисты пытались развивать её положения – например, южноафриканец Александр дю Туа (du Toit), который выдвинул идею о существовании двух древних суперконтинентов Лавразии и Гондваны, разделённых океаном Тетис. Или Артур Холмс в Англии, который, по-видимому, сделал первый шаг к объяснению механизма дрейфа – хотя цельная концепция возникла намного позже.

* * *

Убедительные подтверждения теории дрейфа континентов появились только во второй половине XX века. И пришли они из неожиданных областей. Во-первых, из данных о процессах на дне океанов. Во-вторых, из исследований намагниченности горных пород, образовавшихся в разное время, – эту отрасль науки называют *палеомагнетизмом*.

После Второй мировой войны стало активно изучаться океанское дно и были открыты так называемые *срединно-океанические хребты*. Это довольно высокие, порядка двух километров над уровнем дна, «горные системы», скрытые от нашего зрения водой. Цепи этих хребтов опоясывают Землю наподобие швов на теннисном мячике. А в других областях океанов есть, наоборот, длинные впадины – глубоководные желоба.

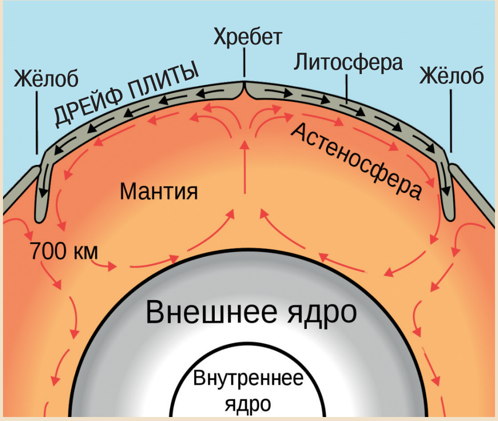
Исследования показали, что у срединно-океанических хребтов есть некоторые необычные особенности. И в 1960-е годы для объяснения этих особенностей была сформулирована *теория спрединга* (от английского spreading – распространение) *океанического дна*.

Согласно этой теории, срединно-океанические хребты – это те участки, где на дне океана «нарастает» новая океаническая кора. Горячая полужидкая магма поднимается из глубины на поверхность вдоль трещины, раздвигает её края и там же застывает. Но избытка коры не образуется, потому что одновременно она погружается обратно в земную мантию в других участках океанического дна – желобах. Кора фактически ползёт как конвейерная лента от хребта к жёлобу. И чем ближе к хребту, тем кора моложе, а чем ближе к жёлобу – тем старше.

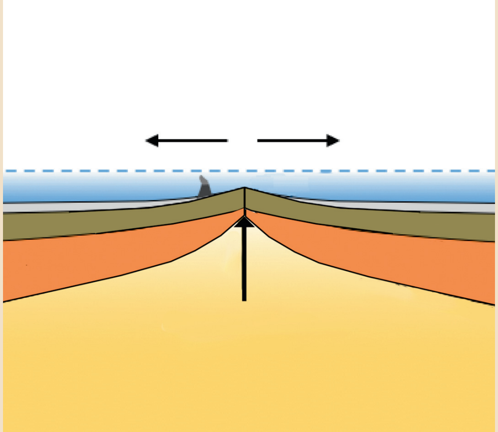
Элегантная теория, однако, нуждалась в убедительном обосновании. И оно пришло из магнитных измерений.

В глубинах Земли горные породы очень горячи. На поверхности они остывают. И если они содержат магнитные материалы, такие как железо, то в процессе остывания происходит явление, хорошо знакомое физикам: как только температура становится ниже определённой точки (она называется точкой Кюри), существовавшее в этот момент направление намагниченности как бы «фиксируется» в камне – как фиксируется форма расплавленного предмета при остывании ниже температуры плавления, как застревает стрелка компаса при нажатии на кнопку. Получается, что нынешняя намагниченность когда-то образовавшихся горных пород – это своеобразная летопись или магнитофонная лента: она говорит нам о направлении магнитного поля Земли именно в тот момент прошлого, когда эти породы застыли.

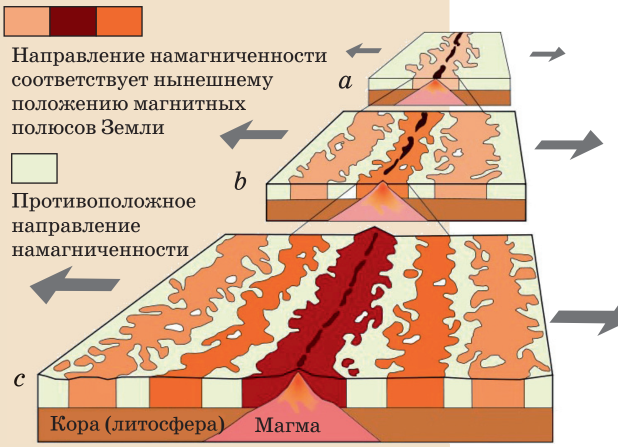
Так вот: оказалось, что по обе стороны вдоль срединно-океанических хребтов намагниченность горных пород (её можно измерить, не погружаясь на дно) носит «полосатый» характер: можно различить полосы горных пород, в которых она поочерёдно направле-



Спрединг


Срединно-океанический хребет


Скелет мезозавра, Бразилия
Фото: Kevmin, Wikimedia



Срединно-океанический хребет и намагниченность горных пород океанского дна

на то в одну сторону, то в противоположную. Причём слева и справа от хребта положение этих полос зеркально симметрично!

Как объяснить это явление? Дело в том, что, как мы сейчас знаем, магнитные полюса Земли время от времени меняются местами: Северный становится Южным и наоборот. Такие инверсии магнитного поля не раз происходили в разные моменты истории Земли – в последний раз около 700 тысяч лет назад. И полосы разной намагниченности по обе стороны хребта как раз и говорят нам о том, что океаническая кора в этой области постепенно нарастала со временем: одна полоса (с обеих сторон хребта) образовалась из тех пород, которые застыли при нынешнем положении полюсов, следующая полоса (опять-таки с обеих сторон) – из пород, которые застыли до того, как Северный и Южный полюс поменялись местами последний раз, следующая – когда они опять-таки были на своих «нормальных» местах...

* * *

Большие куски океанического дна ползут в определённых направлениях, как конвейерная лента. Но отсюда мы как раз и получаем дрейф континентов! Просто континенты дрейфуют не сами по себе, а вместе с большими кусками океанической коры. Не материк ползёт по твёрдому дну, а целая плита, в которую впаян материк, пассивно движется по слою земной мантии (его называют *астеносферой*) – он, конечно, не совсем жидкий, но всё-таки достаточно пластичный. И можно понять, какие силы двигают плитами: глубины Земли горячи, и вещество мантии постоянно движется благодаря нагреванию. Это то же самое явление конвекции, кругового движения, которое мы видим при варке каши в кастрюле: нагретая жидкость из глубины движется вверх, а более холодная в других местах кастрюли опускается с поверхности

Советская книга о Вегенере

вниз. Под поверхностью нашей Земли есть несколько таких «кастрюль» – ячеек конвекции[2].

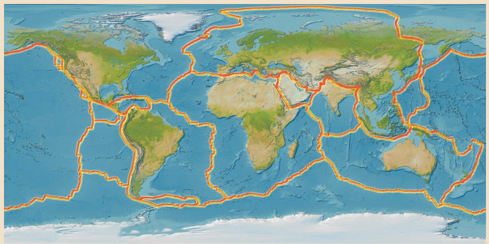
Поэтому материки могут двигаться – как мы сейчас знаем, со скоростью порядка сантиметров в год. Могут сливаться в суперконтиненты, могут разделяться на фрагменты, которые потом опять сталкиваются между собой, и на этом месте образуются горы.

Палеомагнетизм позволил уточнить и детали. Намагниченность различных горных пород на суше тоже говорит о том, каким было направление на Северный магнитный полюс во время их образования. Это направление может совсем не совпадать с нынешним. Во-первых, сами магнитные полюса со временем двигаются (а не только меняются местами): может быть, вы слышали, что не так давно Северный магнитный полюс «переехал» из канадской в российскую часть Арктики. Во-вторых, видимое направление зависит от того, как во время образования породы располагался этот участок суши – ведь он и сам мог «переехать» и «повернуться» вследствие дрейфа континентов. И постепенно учёные научились определять, где находился магнитный полюс в ту или иную древнюю эпоху, и выяснять, как в эту эпоху располагались нынешние континенты. Картинка отлично совпала с вегенеровскими представлениями о суперконтиненте. Пазл окончательно сложился.

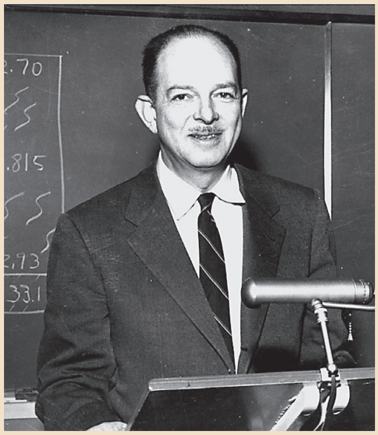
Итак, теория дрейфа континентов получила убедительное объяснение в рамках более общей концепции, которую называют *тектоникой литосферных плит* (*литосфера* – это и есть земная кора). Постепенно эта концепция завоевала мир. Историки науки помнят имена учёных, благодаря которым она сложилась в нынешнее стройное здание: Хесс, Дитц, Ранкорн, Блэкетт, Морли, Вайн, Метьюз и другие.

Но имя Вегенера стоит особняком. Всё-таки он был первым.

[2] На самом деле вклад мантийной конвекции в движение плит до сих пор вызывает споры. Но мы излагаем эту модель как наиболее развитую и общеизвестную.



Границы литосферных плит в наше время

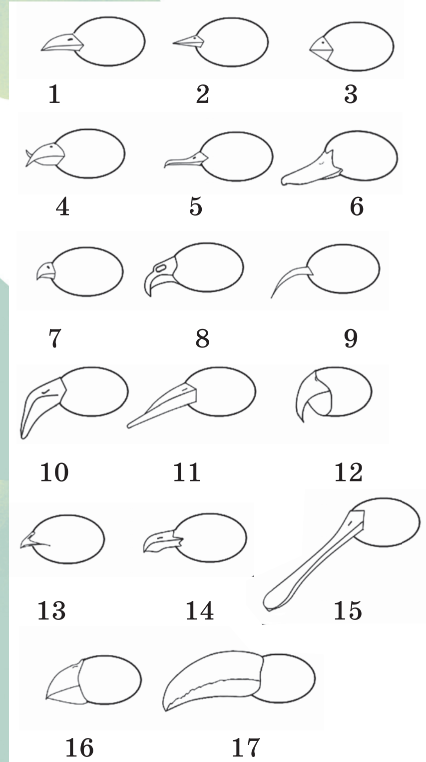


Гарри Хесс (1906 – 1969)

Роберт Дитц (1914 – 1995)

КЛЮВЫ И ПИТАНИЕ

Мария Синькова



В «Квантике» №1 за 2022 год в одной из задач Турнира имени М. В. Ломоносова надо было по виду клюва (см. рисунок) определить тип питания птицы: зерноядная (питается семенами), фруктоядная, насекомоядная, хищник, рыбоядная, падальщик, фильтратор, питается нектаром, питается шишками, всеядная.

Начнём чуть издалека. В зависимости от типа питания зубные системы млекопитающих заметно отличаются друг от друга. Мы можем без труда отличить хищные клыки от плоских моля́ров травоядных, а при особом старании – многовершинные зубы насекомоядных и конусообразные зубы охотников на рыбу.

Так и с клювами птиц: для каждой задачи есть своя особая форма, выполняющая её наиболее эффективно. Легко узнать тонкий клюв-пинцет насекомоядной птицы (№ 2), короткий и мощный клюв зерноядной (№ 3), широкий и уплощённый клюв птицы-фильтратора (№ 6, 10, 15), изогнутый и острый клюв хищника (№ 7).

Но вот клюв вороны (№ 1) приспособлен к выполнению самых разных задач: разрывание мяса, расклёвывание фруктов, разбивание раковин моллюсков, вытаскивание дождевых червей из почвы... Это пример клюва всеядной птицы, универсального инструмента, не имеющего каких-то особенностей в строении. Он в меру крупный, в меру длинный, в меру острый. Практически не имеет отличительных черт.

Клюв стрижа (№ 13) тоже мало похож на типичный клюв насекомоядной птицы. Он короткий и широкий, поскольку стиль охоты стрижей напоминает скорее кита, плывущего сквозь стаю криля с распахнутым ртом, нежели славку или трясогузку. Узнать его можно по особому силуэту и длинной линии рта.

Клювы рыбоядных птиц отличаются разнообразием форм и не всегда легко идентифицируемы. Вероятнее всего силуэт клюва чайки под номером 14 знаком многим, тогда как крохаля (№ 5) и тупика (№ 16) пристально разглядывали не все. Ключевая подсказка – изогнутый крючковидный кончик, не характерный ни для всеядных, ни для зерноядных птиц. Такой зубец помогает удерживать скользкую и активно сопротивляющу-

юся рыбу. Единственный, кто выпадает из этого ряда, это водорез (№ 11). У этой птицы очень специфичный клюв, имеющий заметно выступающую нижнюю часть. Пролетая над косяком мелкой рыбы, водорез действительно разрезает поверхность воды, словно ножом, и выхватывает добычу резким движением головы вверх.

Отличить хищника (№ 7) от падальщика (№ 8) можно по хорошо выраженной, высоко вынесенной ноздре у последнего. Если спросить у случайного человека, какая птица питается падалью, помимо вездесущих врановых наверняка будут упомянуты гриф или стервятник. И действительно, если обратить внимание на их клювы, они отличаются от клювов орлов и соколов длиной и высоко поставленной ноздрёй. Это напрямую связано с необходимостью держать чистыми дыхательные пути при поедании туш, когда в процессе добычи лакомого кусочка птица может погрузить голову едва ли не по плечи в ткани добычи.

Сложнее с фруктоядными птицами. Вероятно, силуэт клюва тукана (№ 17) многим знаком, но не все знают, что пищей туканам служат сочные плоды, а не их семена. Клюв выглядит обманчиво мощным и тяжёлым, но на деле довольно лёгок за счёт пустот внутри. Раздавить с его помощью косточки не выйдет. Также на плодоядность (не путать с плотоядностью!) указывают выраженные зубцы по краю надклювья.

Попугай же (№ 12) мог ввести в заблуждение загнутым клювом, похожим на клюв хищника. В отличие от них, надклювье попугая загнуто чрезмерно и служит своеобразной вилкой для ковыряния плодов. Череп попугаев, хоть и кажется массивным, очень подвижен и имеет множество сочленений, позволяющих совершать тонкие манипуляции. Крупные ара без проблем умеют снимать кожуру с довольно мелких фруктов и шелушить семечки.

У птиц № 4 (клёст) и № 9 (колибри) очень узконаправленные модификации клюва. Вряд ли клёст бросит расщеплять шишки и перейдёт на поедание лещины. Также и колибри, несмотря на родство со стрижами, питается только жидким нектаром. У таких клювов может быть очень мало рабочих вариаций, поэтому они представлены только в одном экземпляре.

Художник Мария Усеинова

Валентина Кириченко,
Владлен Тиморин

КВАДРАТУРА ЛУНОЧКИ

Эту историю мы позаимствовали у древних египтян – только добавили некоторые подробности и пояснения. Как-то бог Солнца Ра разгневался на богиню неба Нут за непослушание. Страшен был его гнев.

– Знай же, несчастная, что отныне не суждено тебе иметь потомства! Я проклял все 360 дней в году – ни в один из них ты не сможешь рожать детей и навечно останешься бездетной.

Жестоко раскаялась Нут в своём проступке. На коленях и со слезами на глазах умоляла она властителя вселенной смягчить свой гнев. Но всё было тщетно – никто не смог бы отменить жестокое проклятие, наложенное самым могущественным богом на свете.

– Неужели никогда я не услышу детского смеха? Ведь в году всего 360 дней, и все они прокляты, – причитала Нут.

Убитая горем, она не заметила, как подошёл к ней Тот – бог мудрости, с фигурой человека и головой птицы ибис. Бог Тот покровительствовал учёным и чиновникам. Благодаря ему люди научились сохранять свои знания и законы, а также передавать их потомкам. Он подарил людям письменность, причём не какие-то бессмысленные значки, которые делают все слова похожими, так что слово «сила» можно перепутать со словом «лиса». Алфавит Тота состоял из картинок, и каждое изображение имело собственный смысл. Словами можно было украшать памятники и гробницы, так что люди, звери, птицы и растения, изящно выведенные на стенах, в то же время представляли собой буквы, а из этих букв возникали наполненные глубоким смыслом слова. Могущественным богом был Тот, но даже ему было не под силу отменить решение Ра.

– Сила в данном случае бессильна, – скаламбурил он. – Но я всё же знаю, как тебе помочь. Тут нужна хитрость и немного мудрости – её, впрочем, мне не занимать.

Бог Тот напросился в гости к богине времени Луне (по-египетски – Хонсу). Луна встретила его радостно – ей очень не хватало общения и хорошей компании, ведь со звёздами особо не поболтаешь. Она просто не знала, как убить время.

– Попробуй решить мою головоломку про луну, точнее, про луночку, – предложила Луна. – Я её только что придумала, и, кажется, она вышла на славу. Даже тебе, богу мудрости, будет непросто её раскусить.

– Готов попробовать, если ты предложишь мне достойный приз за правильное решение, – ответил Тот.

– Но что я могу тебе предложить? У меня же ничего нет, кроме времени.

– Время – это как раз то, чего мне не хватает. Я недавно изобрёл письменность и теперь решил написать книжку, уже даже придумал название – «Книга Живых», но всё не могу выкроить время. Короче говоря, пяти дней в год мне будет вполне достаточно в качестве скромного вознаграждения.

– Ладно, пяти дней не жалко, – сказала Луна. – Слушай внимательно.

Задача про луночку. Изобрази два круга. Первый круг опиши своим посохом. Удвой первый круг – получишь второй круг. Расположи второй круг так, чтобы он высек из первого круга луночку. Площадь луночки должна равняться площади квадрата, построенного на твоём посохе. Если исполнишь всё в точности, то получишь пять дней в подарок.

– Дело в шляпе, – сказал Тот богине Нут, когда вернулся от Луны. – Нам только нужно решить задачу, и у тебя будет целых пять лишних дней в году. Рожай – не хочу.

– Но как же мы её решим? Я и условие с трудом понимаю. Как это – описать круг твоим посохом?

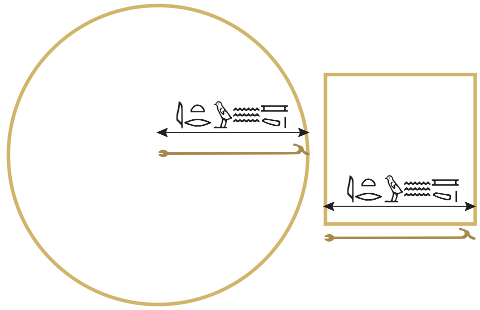
– Это несложно, если ты мне поможешь. Тебе нужно только держать конец посоха, чтобы он никуда не съезжал, пока посох будет поворачиваться.

Нут взяла конец посоха, а Тот повернул посох вокруг неё так, что второй конец описал на песке полный круг.

– Я слышала от богини Маат, что длина твоего посоха – ровно одна схена[1], – сказала Нут, когда первый круг был закончен. – Значит, радиус первого круга – 1 схена.

[1] То есть 10 с половиной километров – известно, что габаритами боги намного превосходили людей.

– Совершенно верно, – ответил Тот. – А сможешь ли ты догадаться, что значит «квадрат, построенный на посохе»?



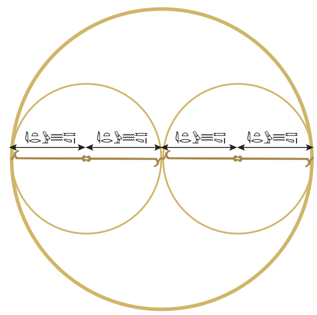
– Я думаю, это просто квадрат, у которого все стороны равны одной схене. – Рядом с кругом Нут изобразила квадрат, отмерив посохом стороны квадрата.

– Теперь нужно удвоить круг, – сказал Тот, – это напоминает какую-то древнюю задачу, о которой говорил мой приятель из северного племени гипербореев. Его имя мне запомнилось, потому что оно очень необычно – Квантик. Кажется, в той задаче нужно было удвоить куб, и почему-то это невозможно было сделать.

– Почему же невозможно? – удивилась Нут. – Удвоить – это просто. Надо очертить круг, взяв посох в два раза длиннее, чем твой. То есть посох длиной 2 схены.

– Нет-нет-нет, – возразил Тот, – в задачах об удвоении всегда речь идёт о том, чтобы удвоилась площадь. Это если говорят о круге или квадрате. А если речь идёт о кубе, то нужно, чтобы объём стал в два раза больше. Если ты в два раза увеличишь радиус круга, площадь увеличится гораздо больше, чем в два раза.

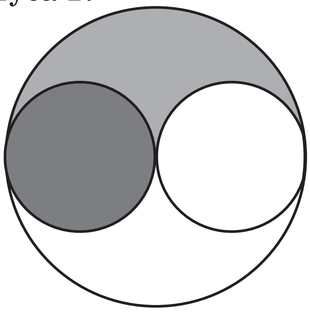
В подтверждение своих слов Тот начертил на песке картинку.



– Да, – согласилась Нут, – действительно, в круге радиуса 2 целиком поместились два круга радиуса 1 и ещё осталось много свободной площади. Интересно, а сколько именно площади осталось?

– Осталось две одинаковые фигуры. Греки-сапожники называют такие арбелосами, – стал размышлять вслух Тот. – Мне кажется, каждый из них имеет такую же площадь, как и круг радиуса 1.

Задача 1. Прав ли Тот? Правда ли равны площади, закрашенные тёмно-серым и светло-серым на рисунке?

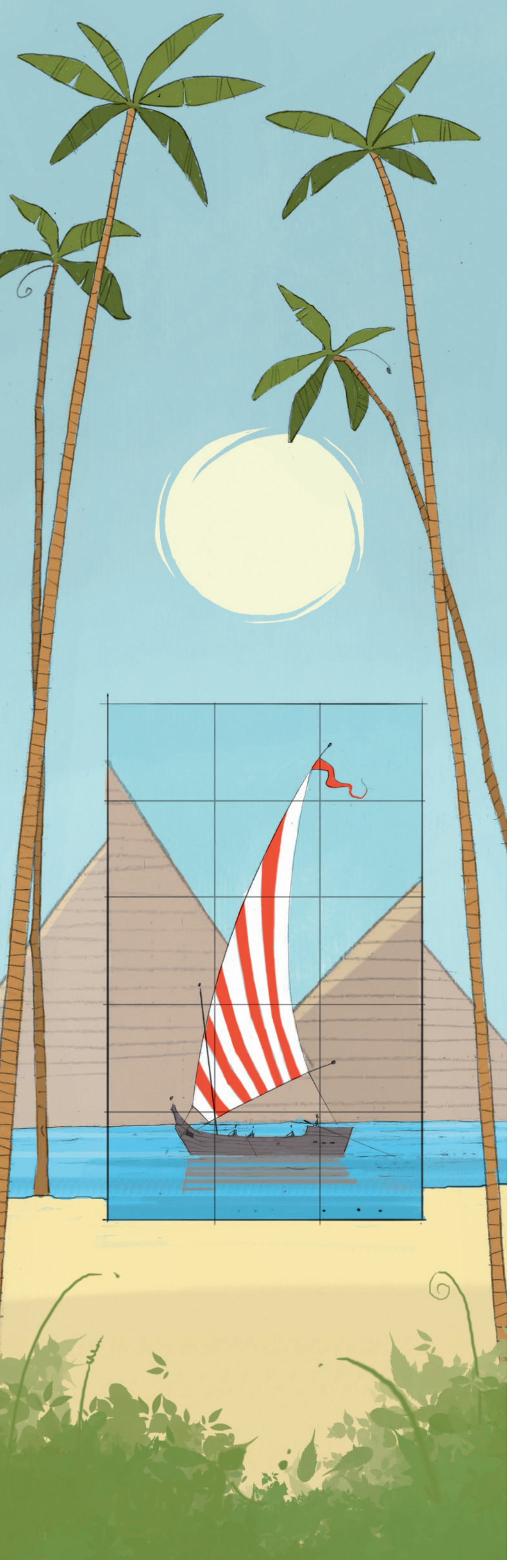


– Ты хочешь сказать, что круг радиуса 2 по площади ровно в 4 раза больше круга радиуса 1? – удивилась Нут. – А почему? Я понимаю, почему площадь квадрата со стороной 2 ровно в 4 раза больше, чем площадь квадрата со стороной 1. Потому что квадрат со стороной 2 можно разрезать на 4 квадрата со стороной 1. Но круг ведь не получится разрезать на 4 одинаковых круга?

– Не получится, – согласился Тот. – Но можно иначе сравнить площади. Представь себе, что круг радиуса 2 нарисован на клетчатом папирусе с очень мелкими клетками. Тогда его площадь примерно равна количеству клеток внутри, помноженному на площадь одной маленькой клетки. А теперь измельчим клетки – поделим каждую клетку на 4 ОЧЕНЬ маленькие клетки. Тогда в круге радиуса 1 ОЧЕНЬ маленьких клеток поместится столько же, сколько раньше помещалось маленьких клеток в круге радиуса 2. Поэтому ОЧЕНЬ маленьких клеток в круге радиуса 2 поместится ровно в 4 раза больше, чем в круге радиуса 1.

– Но мы рассуждаем не про сами круги, а про фигуры, которые составлены из квадратиков и только похожи на круги, – возразила Нут. – Ведь площадь круга никак не сможет в точности совпасть с площадью фигуры, составленной из квадратиков. У клеток граница всегда прямая, а у круга – кривая.

– Квантик в таких случаях говорил, что нужно перейти к пределу, – задумчиво протянул Тот, – но этих северных варваров иногда бывает очень сложно понять. Он как-то рассказывал мне, как искать площадь круга «методом исчерпывания», но я почти ничего не понял. Я уловил только, что если клетки всё время измельчать, то в конце концов мы в точности получим площадь круга.



– А мой повелитель Ра говорил, что площадь увеличивается пропорционально квадрату длины, – вспомнила Нут. – Я тогда не поняла, что он имеет в виду, а теперь начинаю понимать.

– Именно так, – согласился Тот и вытащил из сумки карты Верхнего и Нижнего Египта. – Например, при увеличении масштаба карты в 10 раз площади всех провинций, изображённых на ней, увеличатся в 100 раз. Сравни, как выглядит дельта Нила на этих двух картах.

Масштаб 1:45 000 000

Масштаб 1:4 500 000

– Значит, нам нужно подобрать масштаб так, чтобы площадь круга удвоилась – заключила Нут. – Если принять исходный масштаб за 1:1, то в масштабе 2:1 площадь круга увеличивается в 4 раза. Какой же взять масштаб, чтобы площадь круга увеличилась в 2 раза? Может быть, 3:2?

– Нет, не подходит, – тут же посчитал в уме Тот. – Если 3/2 возвести в квадрат, то получится 9/4. Это больше, чем 2, на целую четверть.

Нут и Тот долго подбирали разные дроби так, чтобы в квадрате они дали ровно 2, но у них ничего не вышло. Самый лучший результат был у Тота – он придумал дробь 99/70. В квадрате она равна 9801/4900, то есть отличается от двойки меньше чем на одну четырёхтысячную.[2]

Нут и Тот так увлеклись, что даже не заметили, как к ним подошёл Гор, небесный бог с головой сокола, сын Исиды и Осириса. Гор долго прислушивался

---

[2] Оказывается, результат Тота нельзя улучшить, если брать только дроби с двузначными знаменателями. Интересно, что найденная им дробь в точности равна отношению сторон листа бумаги формата А4. Как формат бумаги связан с удвоением квадрата, читайте в «Квантике» №1 за 2017 год (статья Евгения Смирнова «Арифметика листа бумаги»).

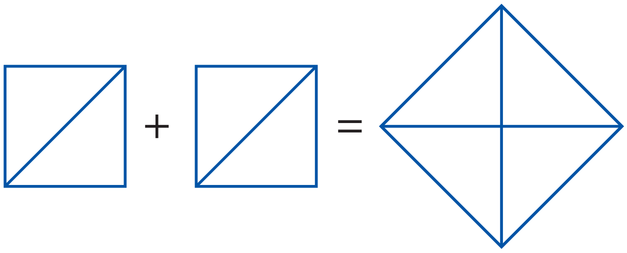
к их разговору и в конце концов понял, что они пытаются сделать.

– Вы пытаетесь удвоить квадрат? – на всякий случай уточнил Гор.

– Привет, Гор! – хором воскликнули Нут и Тот.

– Вообще-то мы пытаемся удвоить круг, – продолжил Тот, – но похоже, что у нас проблемы даже с удвоением квадрата.

– Никаких проблем! – сказал Гор и высек из скалы два одинаковых квадрата. Каждый квадрат он разломил пополам от одного угла к противоположному («по диагонали», как сказал бы Квантик), а из получившихся четырёх треугольников сложил новый квадрат. Нут и Тот в изумлении смотрели на построенное Гором удвоение квадрата.



– Как ловко у тебя получилось! – восхитился Тот. – А мы пытались решить задачу арифметически вместо того, чтобы подумать над геометрическим решением.

– Ты, Тот, два раза спасал меня от смерти, – сказал Гор. – Первый раз – когда меня ужалил скорпион и ты исцелил меня прямо на смертной ладье. Второй раз – когда злодей Сет, убийца моего отца, вырвал у меня глаз, разорвал его на 64 части и разбросал их по всей вселенной. Ты тогда нашёл и собрал почти все эти части, сначала составил из них половину глаза, потом ещё четверть, потом ещё одну восьмую и так далее. Не хватило лишь 1/64 – так и не найденной части, но ты заменил её силой магии. Исцелённый глаз помог мне воскресить моего отца. Я рад, что теперь был тебе полезен. Магия, которой я научился в загробном царстве (туда по своей воле отправился мой воскресший отец), помогает мне с геометрическими головоломками.

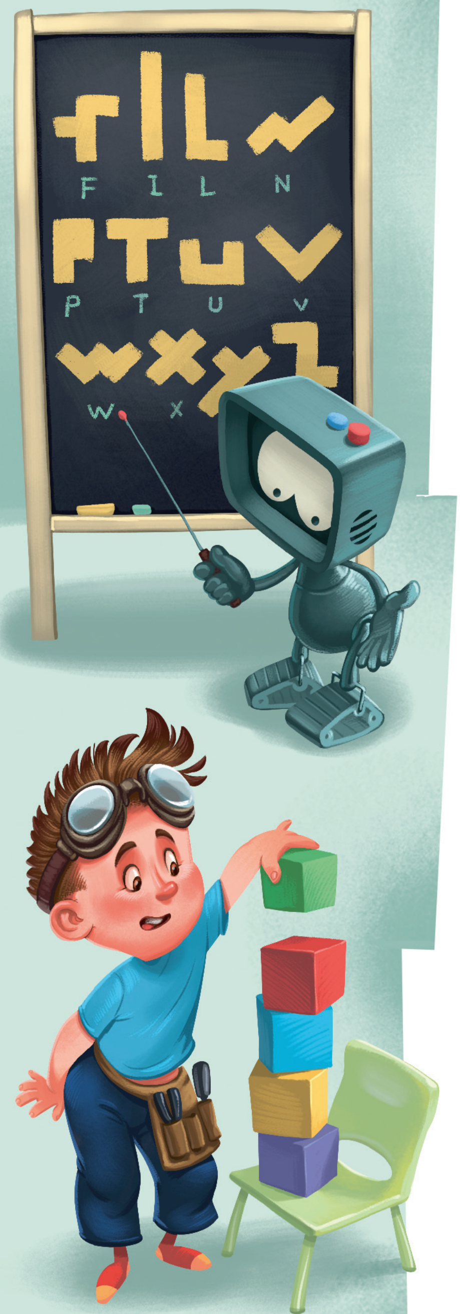
Задача 2. Как удвоить круг?

Продолжение следует

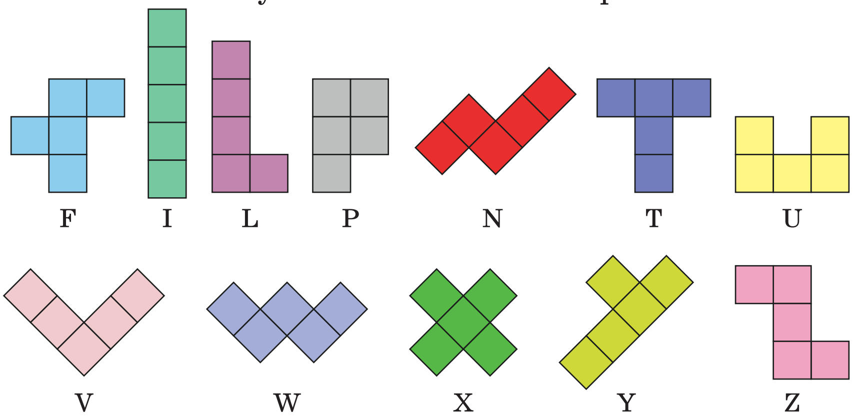
Художник Алексей Вайнер

Александр Домашенко

ДВА КУБА ИЗ ПЕНТАМИНО

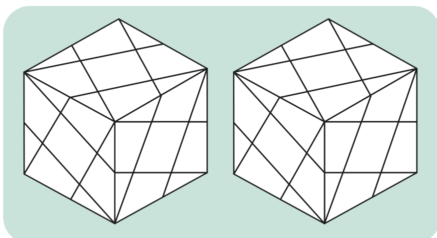


Пентамино – это геометрическая фигура, составленная из пяти квадратов. Если вы ещё не знакомы с пентамино, начните с того, что убедитесь в существовании двенадцати различных фигурок пентамино. Изобретатель пентамино С. В. Голомб придумал обозначать их буквами латинского алфавита:



Запомнить обозначения легко: первые пять букв входят в имя FILiPiNo, а остальные семь составляют конец латинского алфавита.

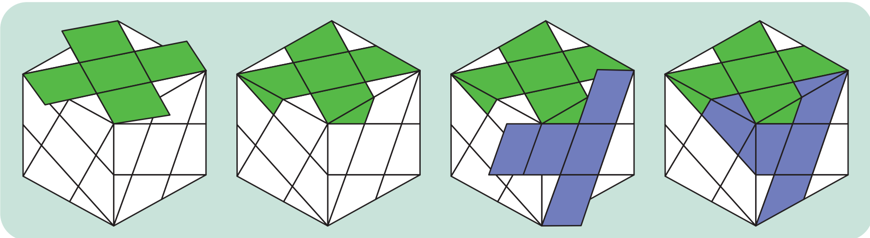
Обычно из комплекта пентамино складывают плоские фигуры. Мы же предлагаем оклеить два куба. Для этого сделайте из картона две модели куба и на каждой грани обоих кубов начертите по четыре отрезка, соединяющих вершину куба с серединой ребра, как показано на рисунке[1]. Это будет «игровое поле». Фигурки пентамино вырезайте из бумаги (лучше цветной) так, чтобы размер квадратов, образующих фигурки, совпадал с квадратом, получившимся в центре каждой грани обоих кубов.

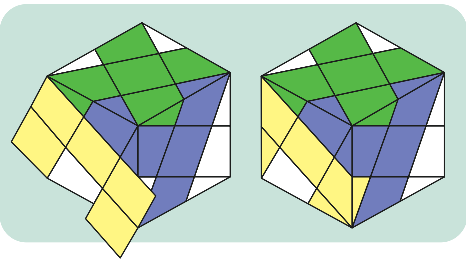


[1] По ссылке kvan.tk/2-kuba можно скачать развёртки кубов и детали головоломки для распечатки.

Теперь остаётся все фигурки пентамино распределить на две группы по шесть штук в каждой с таким расчётом, чтобы фигурками одной группы оклеить поверхность первого куба, а фигурками второй группы – поверхность второго. Сетка, нарисованная на поверхности кубов, безусловно, поможет. Поскольку фигурки пентамино вырезаны из бумаги, их можно перегибать так, чтобы квадраты пентамино ложились на квадраты сетки.

Ниже на рисунке показано начало оклейки куба. На верхнюю грань положено X-пентамино, его уголки загнуты и приклеены к четырём граням, смежным с верхней гранью. К правой боковой грани приклеивается основная часть T-пентамино, а неприклеенные участки загибаются и приклеиваются к смежным граням. При этом одна из частей T-пентамино после перегиба попадает на переднюю грань, а после второго перегиба попадает... на верхнюю грань! К передней грани приклеивается U-пентамино, концы которого загибаются и приклеиваются к соседним граням.





Обратите внимание, что сетка, нарисованная на поверхности обоих кубов, содержит по 30 квадратов, поэтому фигурки пентамино наклеивать нужно без пропусков и наложений. Уточняем, что эта оклейка куба ни в коем случае не подсказка, а всего лишь один из вариантов начала оклейки, возможно и не приводящего к полной оклейке куба. Удачи в решении!

Художник Мария Усеинова

Марина Анатоль

ОТВЕТЫ ОТ СВЕТЫ.

ТРИСТАПАРК

Моя мама обожает свою внучку, как и все бабушки, но иногда плохо её понимает, поскольку общается с ней не очень часто и уже подзабыла, что маленькие дети коверкают слова. Тут и требуется моя помощь. Живём мы рядом и зачастую проводим вечера за одним столом все вместе, разбирая записи с диктофона.

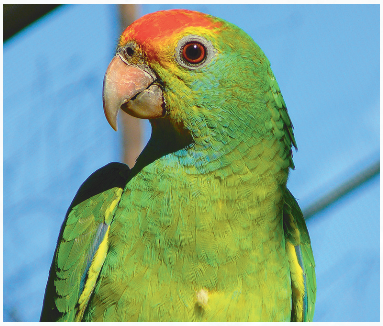
– Ах, мама, напрасно ты так встревожилась! – стала я утешать маму, прослушав её запись.[1]

Два поезда и крутые лестницы, о которых говорила Вика, это пригородная электричка до кольцевой станции метро, два эскалатора и поезд метро.

Тристапарк – это Московский зоопарк.

«Зоо» Вика прочитала как 300. Она недавно научилась считать и очень этим гордится. В зоопарке, действительно, есть большой пруд, в котором плавают самые разнообразные водоплавающие птицы.

[1] См. «Квантик» №1 за 2022 г.



Есть и клетки с экзотическими птицами. Мы видели очень красивого голубя, такие у нас не водятся, и красавца попугая.

Ведь я сказала «Пойдём к попугаям», а Вика поняла это как «Пойдём попугаем». Мы потом так долго смеялись!

А Гаврилка – это, разумеется, горилла, неподалёку в другой клетке – макака (а вовсе не Машка, как послышалось тебе, мама).

Теперь всё прояснилось?

– Совсем другое дело! Такая познавательная поездка, разумеется, Вике на пользу, – задумчиво кивнула головой мама. – Впредь постараюсь спокойней реагировать на твои, Викуля, закавыки.

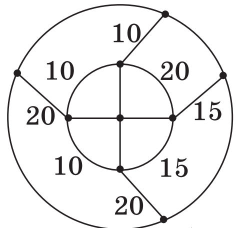
Фото предоставлены автором   Художник Ольга Демидова

LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

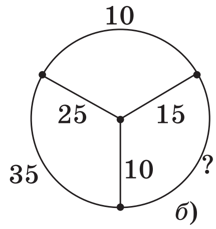
Материал подготовил
Константин Кохась

Первый (письменный) тур Санкт-Петербургской олимпиады по математике для 6 – 11 классов прошёл 4 декабря 2021 года. Вот несколько избранных задач.

Избранные задачи I тура



а)



б)

1. Костя долго гулял по парку: он вышел из центральной точки парка и, пройдя по дорожкам, вернулся в центральную точку (возможно, пройдя по центральной точке несколько раз). На рисунке развилки выделены жирными точками. Приходя на развилку, Костя продолжал движение, не разворачиваясь, – по одной из других дорожек. После прогулки Костя по памяти записал на схеме возле некоторых дорожек, сколько раз он по ним проходил.

а) (7 класс). Не ошибся ли Костя – возможен ли маршрут на рисунке *а*)?

Андрей Солынин

б) (6 класс). Какое число должно стоять на месте вопросительного знака на рисунке *б*)?

Константин Кохась

2 (6 класс). У Медведя имеется верёвка длиной 150 см, из которой он собирается вырезать восемь кусков длиной 1, 2, 3, 5, 12, 26, 39 и 60 см. Сможет ли Маша так разрезать верёвку на две части (не обязательно целой длины), чтобы Медведь не смог вырезать из них нужные ему восемь кусков?

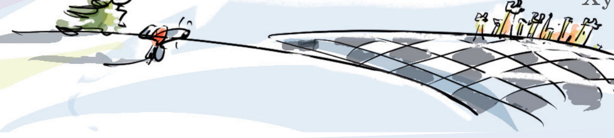
Сергей Берлов

3 (6 класс). В классе 25 мальчиков и 5 девочек, все они разного роста. Каждый день всех учеников рассаживают по 5 человек за 6 столов, и за каждым столом самого высокого назначают дежурным. Могло ли через 31 день оказаться, что все мальчики отдежурили поровну раз?

Ольга Иванова

4 (7 класс). Из клетчатой доски 360×360 вырезали по клеточкам дырку в форме прямоугольника, не выходящего на границы доски. Докажите, что на оставшиеся клетки доски нельзя поставить более 480 не бьющих друг друга ладей (считается, что ладьи не бьют сквозь дырку).

Александр Кузнецов



Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, IV тур («Квантик» № 12, 2021)

16. *На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Житель А рассказал такую историю: – Встретил я жителей В и С. Первый говорит: «Мы оба лжецы». А второй кивает: «Это правда». Про кого из А, В, С можно однозначно определить, кто он – рыцарь или лжец?*

Ответ: про A. Пусть A рыцарь. Тогда второй в его истории не мог быть ни рыцарем (ведь тогда, по словам первого, они оба лжецы), ни лжецом (тогда первый тоже соврал, и, значит, они оба лжецы – противоречие). Поэтому A – лжец, а остальных однозначно определить нельзя.

17. *Расшифруйте ребус: ТУК + ТУК + ТУК + + ТУК + ТУК = СТУК. (Найдите все ответы и докажите, что других нет. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные, и ни одно число не начинается с ноля.)*

Ответ: СТУК = 1250 или СТУК = 3750.

Запишем ребус иначе: ТУК·5 = СТУК, то есть ТУК·5 = С · 1000 + ТУК, откуда ТУК · 4 = С · 1000, значит, ТУК = С · 250. Поскольку ТУК – трёхзначное число, то либо С = 1 и ТУК = 250, либо С = 2 и ТУК = 500 (но тогда У и К заменены одной цифрой – противоречие), либо С = 3 и ТУК = 750.

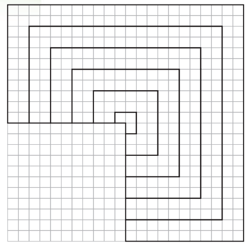
18. *Когда Робинзон Крузо попал на необитаемый остров, у него было 200 ружейных зарядов. Ради их экономии он решил каждый день тратить на охоте не более 5% имеющихся на то утро зарядов. В какой-то момент Робинзон уже не мог делать выстрелы, придерживаясь своего правила. Сколько патронов он истратил к этому моменту?*

Ответ: 181. Если Робинзон не смог сделать выстрел по правилам, то один заряд – это больше, чем 5% имевшихся зарядов. Тогда 20 зарядов – это больше, чем 100% имевшихся зарядов, то есть у него их осталось не более 19. С другой стороны, вчера патронов было хотя бы 20, а осталось не меньше 95% от этого количества, то есть их осталось хотя бы 19. Поэтому Робинзон потратил 200 – 19 = 181 патрон.

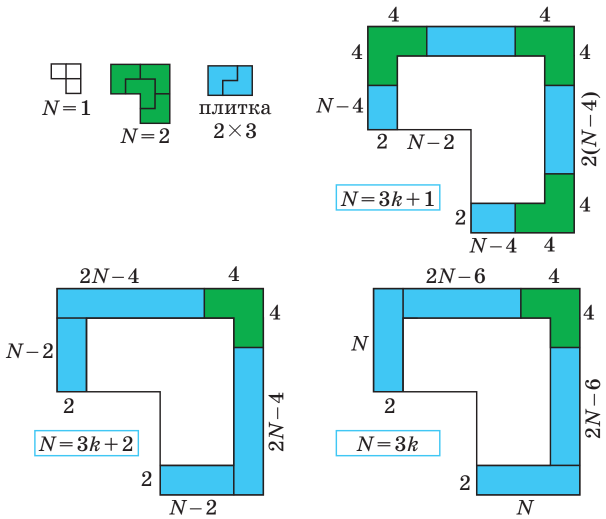
19. *При каких N большой клетчатый уголок, состоящий из трёх квадратов $N\times N$, можно разрезать по линиям сетки на обычные трёхклеточные уголки?*

Ответ: при любых.

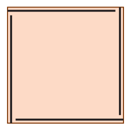
Большой уголок подобно луковице можно разрезать на рамки ширины 2 и, возможно, маленький уголок размера 1, в зависимости от чётности N. Значит, достаточно доказать, что можно разрезать любую рамку.



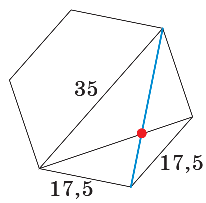
Если заполнять рамку уголками с одного из её концов, неизбежно пары уголков будут объединяться в плитки 2×3. Как именно мы подойдём к первому повороту рамки, зависит от остатка при делении N на 3 (см. рисунки).



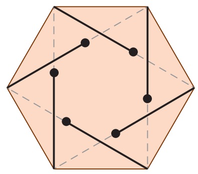
20. *а) Маша испекла торт, имеющий форму квадрата со стороной 21 см. Затем она выбрала внутреннюю точку на одной из сторон и сделала надрез длиной 20 см из этой точки перпендикулярно выбранной стороне. В итоге Маша сделала так для каждой из 4 сторон. Обязательно ли при этом был отрезан хотя бы один кусок? б) Решите ту же задачу, если Маша испекла торт в форме правильного шестиугольника диаметра 35 см и сделала от каждой стороны разрез длиной 20 см перпендикулярно этой стороне.*



Ответ: а) нет (см. рисунок): выберем точки на расстоянии 0,5 см от углов торта, тогда разрезы не пересекутся и ни один кусок не будет отрезан.

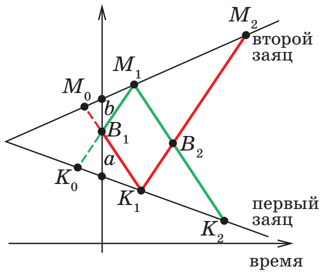


б) В правильном шестиугольнике сторона вдвое меньше большой диагонали (которая и равна диаметру), поэтому красная точка пересечения диагоналей делит синюю диагональ в отношении 2:1. По теореме Пифагора, длина синей диагонали больше 30 см, так как $30^2 + 17{,}5^2 < 35^2$, тогда верхняя часть синей диагонали больше 20 см. Выберем точку на синей диагонали на расстоянии 20 см от верхней стороны – соответствующий разрез не дойдёт до красной точки пересечения диагоналей. Значит, и все остальные разрезы, полученные из этого разреза поворотами, как показано на рисунке, попарно не пересекаются, то есть торт останется целым.



ЗА ДВУМЯ ЗАЙЦАМИ («Квантик» № 1, 2022)

Нарисуем графики движения волка B и зайцев K и M: по горизонтали будем отмечать время, по вертикали – положение животного на прямой (см. рисунок). Получим четыре линии: каждому зайцу соответствует одна прямая, а для волка нарисуем две ломаные линии в зависимости от того, за каким зайцем он погнался вначале. Дорисуем также линии в обратном направлении времени. Обозначим точки встречи животных. Так как волк бегает всегда с одной скоростью, то M_0K_1 параллельна M_1K_2 и K_0M_1 параллельна K_1M_2, то есть $B_1K_1B_2M_1$ – параллелограмм. Тогда волк потратит меньше времени, погнавшись сначала за зайцем M, если $B_2K_2 < B_2M_2$, то есть $B_2K_2 : B_2M_2 < 1$.



Заметим, что $B_2K_2 : B_2M_2 = B_1M_0 : B_1K_0$ (из подобия треугольников $M_0B_1M_1$ и $M_1B_2M_2$ и подобия треугольников $K_0B_1K_1$ и $K_1B_2K_2$). Значит, волк потратит меньше времени, погнавшись сначала за зайцем M, если $B_1M_0 : B_1K_0 < 1$. Но это отношение равно отношению времени, за которое волк встретится с зайцем M, ко времени, за которое волк встретится с зайцем K, если животные побегут навстречу друг другу.

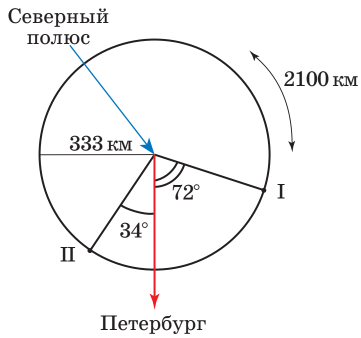
Отсюда ответ: если a и b – расстояния до зайцев K и M, u и v – их скорости, w – скорость волка, то быстрее гнаться сначала за зайцем M, а потом за K, когда $b/(v+w) < a/(u+w)$. В частности, если $a = b$, быстрее гнаться сначала за зайцем, бегающим с большей скоростью.

ПУТЕШЕСТВИЕ ИЗ КАИРА («Квантик» № 1, 2022)

Все меридианы одинаковые, а все параллели в одном полушарии – разной длины. Поэтому 3000 км на север – одно и то же число градусов широты, откуда ни начинай. А 4000 км на восток – чем дальше от экватора, тем большее число градусов. Поэтому путешественники оказались на одной параллели («никто не севернее»), но второй – восточнее, чем первый. Значит, он же и дальше от старта.

Рио-де-Жанейро заметно южнее экватора (23° ю. ш.), и там, наоборот, первый путешественник шёл на восток по более короткой параллели, а второй – почти по экватору. Так что первый восточнее (и, значит, дальше).

Сложнее всего с Санкт-Петербургом. Его широта 60°. Длина меридиана 40 тыс. км, длина одного градуса вдоль меридиана – 40 тыс. : 360 = = 111 км. Так что 3000 км – это 3000 : 111 = 27° на север. Итого 87° северной широты! Это совсем близко к Северному полюсу, всего $3 \cdot 111 = = 333$ км от него. Параллели там короткие. На таких расстояниях (333 км – размер Московской области) поверхность Земли почти плоская, так что длина параллели примерно равна $2\pi \cdot 333 \approx 2100$ км. Итак, второй путешественник пройдёт почти два круга и остановится примерно на 200 км ~ 34° западнее Санкт-Петербурга! (А если учитывать кривизну Земли, то ещё ближе, потому что параллель ещё короче.) Первый же путешественник шёл по параллели длиной 20 тыс. км, вдвое короче экватора, и сместился на восток на (4000 : 20000) × × 360° = 72°. Так что он дальше! Второй «зашёл так далеко на восток, что оказался на западе». Так что первый оказался восточнее, чем второй.



СУММЫ ТРЁХ КУБОВ («Квантик» № 1, 2022)

1. Небольшим перебором можно найти решение $3 = 4^3 + 4^3 + (-5)^3$. Эндрю Букер и Эндрю Сазерленд нашли недавно ещё одно представление:

$$3 = 569936821221962380720^3 + \\ +(-569936821113563493509)^3 + \\ +(-472715493453327032)^3.$$

Есть ли другие представления – неизвестно.

2. Квадраты дают остатки 0, 1 или 4 при делении на 8. Поэтому сумма трёх квадратов не может давать остаток 7 при делении на 8 (а остальные может). В частности, все числа вида $8k+7$ не представимы в виде суммы трёх квадратов.

3. Да! Как показано в статье, для $x=6t^3-1$, $y=6t^2$, $z=6t^3+1$ требуемое равенство выполняется с погрешностью всего 2 при любом t. Осталось взять t побольше, чтобы 2 составляло от $6t^3+1$ не больше 0,01% (подойдёт любое $t>11$).

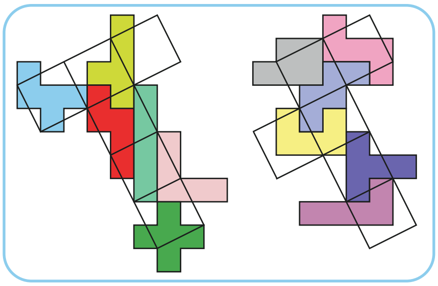
4. Существуют, например

$$(1\cdot 100^{33})^3+(2\cdot 100^{33})^3+(3\cdot 100^{33})^3+(4\cdot 100^{33})^3=$$
$$=(1^3+2^3+3^3+4^3)\cdot 100^{99}=100\cdot 100^{99}=100^{100}.$$

5. Заметим, что $(n+7)^3-(n+6)^3-(n+5)^3+(n+4)^3-(n+3)^3+(n+2)^3+(n+1)^3-n^3=48$ при любом n. С другой стороны, число $(48k+1)^3$ при любом k даёт при делении на 48 остаток 1. Складывая такие кубы, можно получить сумму с заданным остатком от деления на 48; прибавляя или вычитая комбинации, равные 48, можно получить любое число с таким остатком.

ДВА КУБА ИЗ ПЕНТАМИНО

Для обоих кубов показано одно из решений-оклеек на развёртке куба.

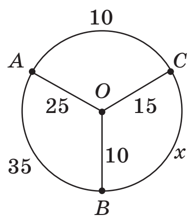


LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. а) Ответ: нет. По дорожкам, ведущим из внутреннего круга на внешний, Костя суммарно прошёл $10+15+20+20=65$ раз. Но он поровну раз перешёл с внутреннего круга на внешний и с внешнего на внутренний, поэтому указанная сумма должна быть чётной!

б) Ответ: 25. Пусть на месте знака вопроса стоит число x.



Каждый раз, когда Костя шёл по дуге AB, проходя через B, он двигался либо по пути A-B-O, либо по пути A-B-C (в каком-то направлении). А ещё он мог проходить через B, не заходя на дугу AB, а поворачивая с OB на BC (или обратно). Значит, *число проходов по дуге AB не превосходит суммарного числа проходов по дорожкам OB и CB*. Поэтому $35\leqslant 10+x$, откуда $25\leqslant x$. Изучая аналогично движение Кости по дуге BC через вершину C, получаем, что $x\leqslant 10+15$, откуда $x\leqslant 25$.

2. Ответ: да. Пусть Маша разрежет верёвку на части 25,5 см и 124,5 см. Тогда куски верёвки с длинами 26, 39 и 60 см придётся вырезать из большей части. Но сумма их длин равна $26+39+60=125$ см – больше длины этой части.

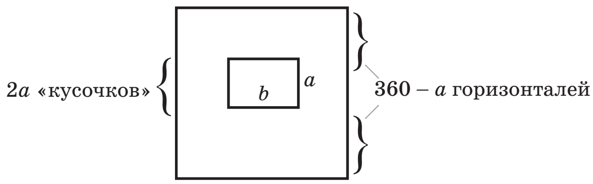
3. Ответ: не могло. Раз столов 6, а девочек 5, каждый день дежурил хоть один мальчик.

Пусть все мальчики дежурили поровну, тогда они отдежурили одинаковое *ненулевое* число раз. Тогда четверо самых низких детей ни разу не дежурили, ведь никто из них не мог быть самым высоким за столом, где сидят пятеро. Значит, эти четверо – девочки.

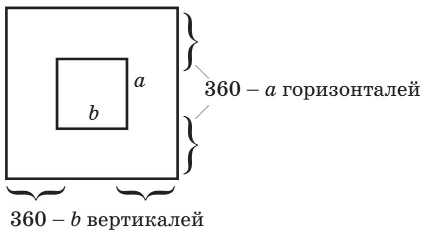
А самый высокий ребёнок дежурил каждый день, то есть 31 раз. Если это был мальчик, то все мальчики отдежурили 31 раз, что невозможно, так как каждый день дежурит всего лишь 6 человек, а не 25. Значит, самый высокий ребёнок в классе – девочка, и она дежурила каждый день.

Поскольку всего девочек 5, каждый день дежурили одна девочка и 5 мальчиков. Тогда за 31 день мальчики отдежурили $5\cdot 31$ раз. Это число не делится на 25 (число мальчиков), значит, у мальчиков не могло быть поровну дежурств.

4. Если у дырки $a\times b$ хотя бы одна из сторон не превосходит 120, например $a\leqslant 120$, то доска покрывается $360-a$ горизонталями и $2a$ «кусочками» горизонталей, на каждой из этих линий стоит не более одной ладьи, значит, всего не больше $360-a+2a=360+a\leqslant 480$ ладей.



Если же a, $b\geqslant 120$, то доску можно покрыть $360-a\leqslant 240$ горизонталями и $360-b\leqslant 240$ вертикалями, всего получится тоже не более 480 ладей.



Замечание. Расставить ровно 480 ладей можно на доске с вырезанным в центре квадратом 120×120 (расставьте!).

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VI тура, с которыми справитесь, не позднее 5 марта в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VI ТУР

26. Мудрецам A и B выдали по натуральному числу и сказали, что эти числа различаются на 1. «Я не знаю, знаешь ли ты моё число», сказал A, обращаясь к B. Какое число у A?

27. Разрежьте кольцо с дырочкой (рис. 1) на четыре равные части и из полученных частей сложите снежинку (рис. 2).

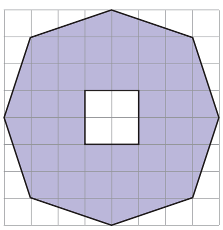


Рис. 1

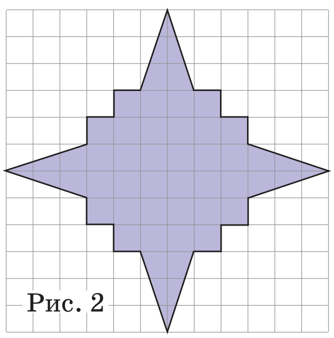


Рис. 2

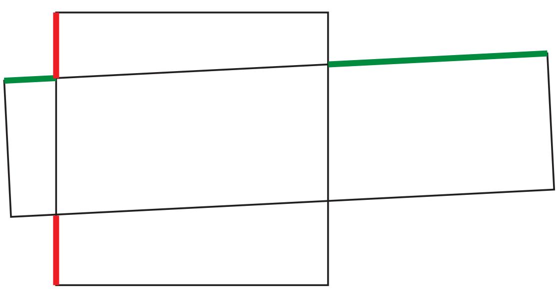
Авторы: Михаил Фрайман (26), Сергей Костин (27), Игорь Акулич (28), Борис Френкин (29), Людмила Смирнова (30)

28. В IV туре нашего конкурса требовалось расшифровать ребус ТУК × 5 = СТУК, он имеет два решения. а) Замените пятёрку другой цифрой так, чтобы получился ребус, имеющий решение. б) Докажите, что такая цифра ровно одна. в) Докажите, что решение у нового ребуса единственное.

(Как обычно, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, и ни одно число не начинается с нуля.)

29. Некоторые клетки белой прямоугольной таблицы закрасили синим. Во всех строках количество синих клеток различно, и во всех столбцах тоже. Докажите, что если в таблице не поровну строк и столбцов, то в ней поровну белых и синих клеток.

30. Квадрат 6×6 и прямоугольник 3×12 пересекаются, как показано на рисунке. Докажите, что сумма зелёных отрезков в два раза больше суммы красных отрезков.



Художник Николай Крутиков

ЛЁД на реке и СНЕГ на берегу

осень...

Почему осенью сначала берега укрываются снегом и лишь потом замерзает река, а весной сначала оттаивают берега и лишь потом река?

весна...

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986